

Leçon 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

[Ber] : *Algèbre, le grand combat*, Grégory Berhuy

[Cal-Per] : *Carnet de voyage en Algèbre*, Phillipe Caldero, Marie Peronnier

[Cal] : *Théorie des groupes*, Josette Calais

[Per] : *Cous d'algèbre*, Daniel Perrin

[Szp] : *Mathématiques Algèbre L3*, Aviva Szpirglas

[Ulm] : *Théorie des groupes*, Félix Ulmer

I Partie A - Un peu de théorie [Szp] [Cal] [Ulm]

I.1 Outils de base

■ **Déf 1 (Groupe fini, ordre) :**

■ **Déf 2 (Ordre d'un élément) :**

Rem 3 : Lien entre les différentes définitions de l'ordre.

■ **Ex 4 :** Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

■ **Déf 5 (Indice d'un sous-groupe) :**

■ **Thm 6 (Lagrange) :**

App 7 (Corollaire Lagrange) :

■ **Ex 8 :** Un groupe de matrice fini est diagonalisable.

■ **Prop 9 (Sous-groupe d'indice 2) :**

I.2 Équation aux classes

■ **Déf 10 (Rappels sur les actions) :**

■ **Prop 11 (Relation orbite-stabilisateur) :**

■ **Thm 12 (Équation aux classes) :**

App 13 (Lemme de Cauchy) :

■ **Déf 14 (p -groupe) :**

App 15 (Centre d'un p -groupe) :

App 16 (Structure des groupes d'ordre p^2) :

II Partie C - Les groupes cycliques [Rom] [Per] [Szp]

■ **Déf 17 (Groupe cyclique) :**

■ **Ex 18 :** Racines de l'unité, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sous groupes finis de $K^\times$.

Rem 19 : On peut se ramener aux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

■ **Prop 20 (Groupe d'ordre premier) :**

■ **Prop 21 (Classification des groupes cycliques) :**

■ **Thm 22 (Sous-groupes d'un groupe cyclique) :**

■ **Ex 23 :** Sous-groupes de $\mathbb{U}_n$.

■ **Déf 24 (Indicatrice d'Euler) :**

■ **Thm 25 (Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) :**

■ **Ex 26 :** Donner des exemples triviaux.

■ **Thm 27 (Restes chinois) :**

■ **Contre-Ex 28 :** Groupe de Klein.

App 29 : Application des restes chinois à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

■ **Dév 30 (Critère de cyclicité de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$) :**

■ **Thm 31 (Structure des groupes abéliens) :**

III Partie B - Les théorèmes de Sylows [Ber] [Szp] [Ulm] [Per]

■ **Déf 32 (p -Sylow) :**

■ **Ex 33 :** L'ensemble H formé des matrice triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale est un p -Sylow de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

■ **Dév 34 (Théorèmes de Sylow) :**

App 35 : Tout groupe de cardinal 45 est isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$.

App 36 : Si G est abélien, il est produit direct des ses p -Sylows.

App 37 (Groupes d'ordre pq) :

IV Partie D - Des groupes non abéliens : les permutations [Szp] [Per] [Cal]

IV.1 Groupe des permutations

■ **Déf 38 (Permutations) :**

■ **Ex 39 :** Cycles.

■ **Prop 40 :** $\mathfrak{S}_n$ est d'ordre $n!$ et il n'est abélien que pour $n = 1$ et $n = 2$.

■ **Thm 41 (Décomposition en cycles disjoints) :**

■ **Ex 42 :** Voir [Cal].

■ **Prop 43 (Formule magique) :**

App 44 (Centralisateur de $\mathfrak{S}_n$) :

■ **Thm 45 (Cayley) :**

■ **Prop 46 (Générateurs) :**

App 47 (Automorphismes intérieurs) :

IV.2 Groupe alterné

■ **Déf 48 (Signature) :**

■ **Ex 49 :** Signature d'un cycle.

■ **Déf 50 (Groupe alterné) :**

■ **Prop 51 :** $\mathfrak{A}_n$ est d'ordre $n!/2$ et est distingué dans $\mathfrak{S}_n$.

■ **Prop 52 (Générateurs) :**

■ **Thm 53 (Simplicité de $\mathfrak{A}_n$) :**

App 54 (Groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$) :

■ **Contre-Ex 55 :**

V Partie E - Un peu de géométrie [Cal][Cal-Per]

■ **Déf 56 (Isométrie affine) :**

■ **Ex 57 :** Voir [Cal].

■ **Déf 58 (Groupes diédraux) :**

■ **Thm 59 (Structure des groupes diédraux) :**

■ **Déf 60 (Cube, tétraèdre) :**

■ **Thm 61 (Isométries du cube, du tétraèdre) :**